



# Änderungen beim Abitur im Fach Mathematik ab 2023 und ab 2024

Implementationsveranstaltungen  
der Bezirksregierung ...  
September 2021



# Tagesordnung

- (1) Anlass der Implementation und Perspektiven
- (2) Notwendige Anpassungen ab Abitur 2023
  - a) Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht
  - b) Allgemeine Hinweise zu den Abituraufgaben
- (3) Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024



Beschlossene politische Vorhaben der KMK (Oktober 2020):

- Ab 2023 soll jedes Land **modifikationsfrei mindestens 50 % aus dem bundesweiten Aufgabenpool in D, M , E und F** entnehmen.
- Für eine modifikationsfreie Entnahme von Poolaufgaben ist eine **Vereinheitlichung der Rahmenbedingungen** notwendig:
  - Kernlehrplan GOST Mathematik
  - Mathematikwerkzeuge
  - Operatorenübersicht
  - Auswahlbedingungen
  - Zeitliche und organisatorische Struktur



## Perspektiven: KLP

Inkraftsetzung eines neuen KLP GOSt Mathematik geplant  
zum 1.8.2023

→ Durchführung des Mathematikabiturs voraussichtlich auf  
Grundlage des neuen KLP ab 2026



## Perspektiven: Mathematikwerkzeuge

Schulmail August 2020:

- GTR voraussichtlich nur bis zum Abitur 2025 in NRW zugelassen
- Weiterhin Bereitstellung eines CAS-Aufgabensatzes
- Entscheidung, welche digitalen Werkzeuge neben CAS zukünftig im Mathematik-Abitur zugelassen werden, wird im Rahmen der Kernlehrplanentwicklung erfolgen.



## Notwendige Anpassungen ab Abitur 2023:

### Anpassung der Operatorenübersicht

Übernahme der bundesweiten Operatorenübersicht des IQB für NRW

- Die Konstruktion der Aufgaben erlaubt künftig die Verwendung von **Operatoren, die nicht in der Übersicht** aufgeführt sind, wenn „aufgrund der standardsprachlichen Bedeutung dieses Operators in Verbindung mit der Aufgabenstellung davon auszugehen ist, dass die jeweilige Aufgabe im Sinne der Aufgabenstellung bearbeitet werden kann“.
- Einige nicht mehr gelistete Operatoren werden bereits in NRW verwendet. Beispiele: **herleiten, ordnen, prüfen, vergleichen**
- Die Operatoren sind **keinem Anforderungsbereich mehr zugeordnet**.  
→ Jeder Operator kann grundsätzlich alle Anforderungsbereiche abdecken.



## Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht:

### „zeigen“ kann auch „AFB I“ ansteuern

Der Operator „zeigen“ verlangt, dass Sachverhalte durch logisches Schließen bestätigt werden. Das Vorgehen ist darzustellen [vgl. IQB Operatorenliste].

Aus: 2018 EN A  
Geometrie 1 1

Gegeben sind die Ebene  $E: x_2 - 3x_3 = -19$  sowie die Punkte  $P(1|2|2)$ ,  $Q(1|-1|11)$  und  $S(-2|-4|5)$ .

a Zeigen Sie, dass S in der Ebene E liegt.

1

Lösung:  $-4 - 3 \cdot 5 = -19$



## Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht:

### „angeben“ kann auch „AFB III“ ansteuern

Der Operator „angeben“ erfordert **keine Begründung** [vgl. IQB Operatorenliste]. Im AFB III erfordert die Angabe vorausgehende komplexe Überlegungen:

Ein Behälter enthält zu Beobachtungsbeginn zwei Liter einer Flüssigkeit. Für die anschließenden fünf Stunden gibt die Funktion  $f$  mit  $f(t) = -t \cdot (t - 4)$  die momentane Zuflussrate der Flüssigkeit in Liter pro Stunde an. Dabei ist  $t$  die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Stunden. [...]

Aus: 2018 GN A  
Analysis 2

- b** Geben Sie eine Gleichung an, mit der berechnet werden kann, wie viele Stunden vom Beobachtungsbeginn an vergehen, bis der Behälter sieben Liter der Flüssigkeit enthält.

2

Lösung:  $2 + \int_0^t f(x) dx = 7$

Es ist möglich, 0, 1 oder 2 Punkte zu vergeben.



# Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht:

## Operator „ordnen“ nicht gelistet, aber bekannt

Aus: 2018 EN B  
Analysis CAS3

Ein zwischen den beiden Befestigungspunkten an den Pfeilern unbelastet hängendes Drahtseil könnte im verwendeten Koordinatensystem mithilfe einer der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktionen  $h_{s,t} : x \mapsto \frac{s}{2} \cdot \left( e^{\frac{1}{s} \cdot x} + e^{-\frac{1}{s} \cdot x} \right) + t$  mit  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  und  $t \in \mathbb{R}$  beschrieben werden.

c Abbildung 2 zeigt die Graphen dreier Funktionen  $h_{s,t}$ , die sich nur im Wert von  $s$  unterscheiden. Ordnen Sie die Graphen nach der Größe des Werts von  $s$ , beginnend mit dem kleinsten. Begründen Sie Ihre Reihenfolge.

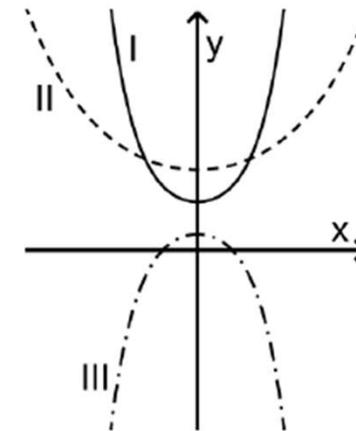


Abb. 2

3

Modellösung:

c III - I - II

Begründung: Es gilt  $h_{s,t}(0) = s + t$ , d. h. die  $y$ -Koordinate des Schnittpunkts des Graphen von  $h_{s,t}$  mit der  $y$ -Achse wird mit zunehmendem Wert von  $s$  größer.



## Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht:

### Operator „prüfen“ nicht gelistet, aber bekannt

Aus: 2018 GN B  
Analysis CAS1

3 Die größten Flugweiten erzielen Papierflieger mit Flugkurven des Typs G. Eine solche Flugkurve soll mithilfe der in  $\mathbb{R}$  definierten Funktion  $g$  mit  $g(x) = 2e^{-0,02x^2+0,1x}$  beschrieben werden.

b Die Flugweite beträgt 15,3 m. Der erste Teil der Flugkurve lässt sich mithilfe von  $g$  beschreiben. Ab einem bestimmten Punkt kann der weitere Verlauf der Flugkurve bis zum Boden durch eine Gerade dargestellt werden. Dieser zweite Teil der Flugkurve hat eine Länge von 10,6 m. Bestimmen Sie die horizontale Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve vom Abwurfpunkt und prüfen Sie, ob dieser Übergang ohne Knick erfolgt.

7

Lösung:

b Für  $x \leq 15,3$  liefert  $(15,3 - x)^2 + g(x)^2 = 10,6^2$ :  $x \approx 4,89$

Die Entfernung des Übergangs vom ersten zum zweiten Teil der Flugkurve von der Abwurfstelle beträgt etwa 4,89 m.

$$g'(4,89) \approx -0,19$$

$$\frac{-g(4,89)}{15,3-4,89} \approx -0,19$$

Der Übergang erfolgt näherungsweise ohne Knick.

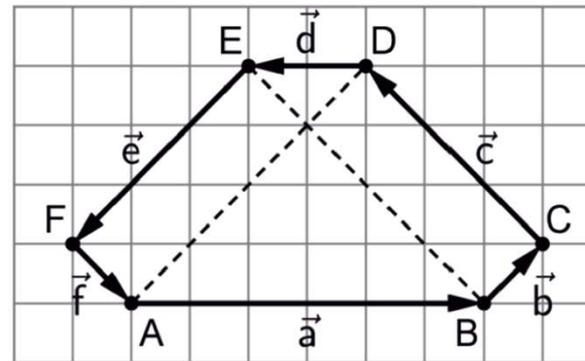


# Aufgabenbeispiele zur neuen Operatorenübersicht:

## Operator „darstellen“ nicht gelistet, aber bekannt

Aus: Beispiel  
GNAG 12

Im abgebildeten Sechseck ABCDEF sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a Stellen Sie die Vektoren  $\vec{x}$  und  $\vec{y}$  jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

2

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$

$$\vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$$

b Stellen Sie den Vektor  $\vec{FB}$  mithilfe von drei der Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{d}$ ,  $\vec{e}$  und  $\vec{f}$  dar.

1

Lösung:

a	$\vec{x} = \vec{BE}$ , $\vec{y} = \vec{FE}$	2
b	$\vec{FB} = \vec{f} - \vec{e} - \vec{c}$	1



## Neue Operatorenübersicht:

- Gültig im Mathematik-Abitur ab dem Prüfungsjahr 2023
- und für die Zentrale Klausur Mathematik am Ende der Einführungsphase ab dem Jahr 2022.

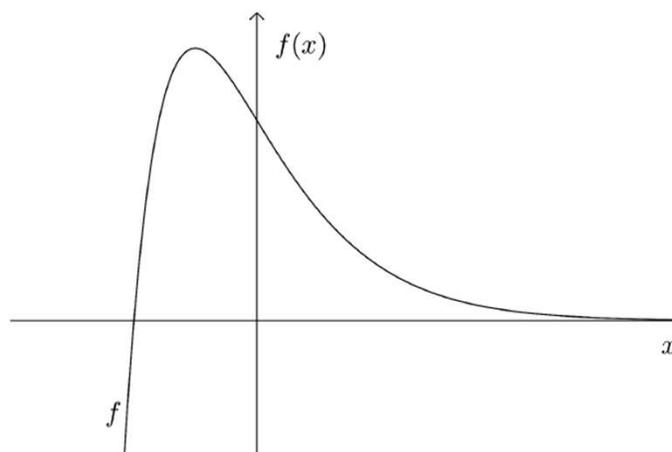
# Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben: Gegebene Informationen



- Alle im Aufgabentext gegebenen Informationen dürfen im Folgenden verwendet werden. Im Allgemeinen wird nicht explizit darauf hingewiesen.

b) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = (x+2) \cdot e^{-x+4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

Der Graph von  $f$  ist in *Abbildung 2* dargestellt.



*Abbildung 2*

(1) Die Funktion  $f$  besitzt genau eine Extremstelle.

*Ermitteln Sie die Extremstelle von  $f$ .*

~~Hinweis: Ein Nachweis der hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.~~

Aus: NRW 2021 GK  
HT A

# Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben:



## Gegebene Informationen (Beispiel IQB)

Aus: 2020  
GN B A WTR 2

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{1}{10}x \cdot (3-x) \cdot e^x$  und  $x \in \mathbb{R}$ .

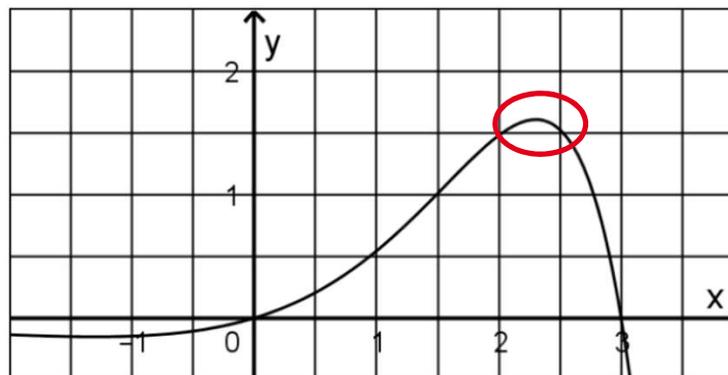


Abb. 1

1 Für die erste Ableitungsfunktion  $f'$  von  $f$  gilt  $f'(x) = -\frac{1}{10} \cdot (x^2 - x - 3) \cdot e^x$ .

a Geben Sie die Nullstellen von  $f$  an und berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von  $f$ .

4

Qualitative Existenz des HP wird aus Bild und Text vorausgesetzt.

Lösung:

1 a Nullstellen: 0 und 3

Hochpunkt:

$$\text{Für } x \geq 0 \text{ liefert } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3 = 0: x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \approx 2,3$$

$$y = f\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right) \approx 1,6$$

4

# Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben:

## Hinweise zur Dokumentation



Operator „berechnen“ nach neuer Operatorenübersicht:

„Die Berechnung ist ausgehend von einem Ansatz darzustellen.“

→ Dokument „Hinweise zur Dokumentation ...“ ab Abitur 2023 hinfällig

# Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben:

## Umrechnung von Einheiten



- Aufgaben mit Sachbezug fordern häufig das Umrechnen von Einheiten

**3** Um den Verkaufswert eines Baumstamms zu bestimmen, wird dessen Durchmesser in einer Höhe von 1,3 m verwendet. Dieser Durchmesser wird als Brusthöhendurchmesser (BHD) bezeichnet.

- a** Ein Fichtenstamm hat einen BHD von 40 cm. Sein Volumen vom Boden bis zu einer Höhe von 1,3 m beträgt  $0,17 \text{ m}^3$ . Es soll davon ausgegangen werden, dass der Durchmesser des Stamms mit zunehmender Höhe linear abnimmt. Berechnen Sie den Durchmesser des Stamms in einer Höhe von 15 m.

Aus: 2020 EN  
B A CAS 2



## Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben: Modellierungen im Teilgebiet Stochastik - 1

- Würfel werden als fair vorausgesetzt.
- Binomialverteilte Zufallsgrößen werden nicht immer explizit deklariert.

Die Bigband einer Schule nimmt anlässlich des 50-jährigen Jubiläums der Schule eine CD mit zehn Musikstücken auf; vier dieser Stücke sind kurz, sechs lang. Diese CD wird in großer Anzahl hergestellt.

**1** Bei der Jubiläumsfeier werden von einer dieser CDs in zufälliger Reihenfolge Stücke abgespielt, wobei jedes Stück auch mehrfach abgespielt werden kann.

**a** Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei abgespielten Stücke verschieden sind. 2

**b** Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich unter zwölf abgespielten Stücken 4

◆ genau fünf lange Stücke befinden.

◆ mehr lange als kurze Stücke befinden.

Aus: 2020 EN  
B S CAS1



## Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben: Modellierungen im Teilgebiet Stochastik - 2

Normalverteilte Zufallsgrößen werden explizit ausgewiesen.

2 Zucker wird in unterschiedlich großen Packungen angeboten. Es soll davon ausgegangen werden, dass für jede Packungsgröße die tatsächliche Masse des Zuckers durch eine normalverteilte Zufallsgröße beschrieben werden kann.

Aus: 2020 EN  
B S WTR 2

a Für eine bestimmte Packungsgröße ist  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{200\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-500)^2}{200}}$  der Term der zugehörigen Dichtefunktion, wobei  $x$  die Masse des Zuckers in Gramm ist. Geben Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Masse jeweils in Gramm an.

2



## Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben: Informationen im Einleitungstext

Oft werden Informationen im Einleitungstext deklariert, jedoch erst in späteren Teilaufgaben verwendet.

Teilaufgaben  
a), b), c), d)

Aus: 2017 EN  
B G WTR3

Der Standort der  
Radarstation ist  
der Punkt R, der  
nur aus dem  
Einleitungstext  
bekannt ist.

Eine Radarstation überwacht die Bewegung eines Flugzeugs. Die Bewegung kann modellhaft in einem kartesischen Koordinatensystem dargestellt werden, dessen  $x_1x_2$ -Ebene die Horizontale beschreibt; eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität. Der Standort der Radarstation wird durch den Punkt  $R(18|0|-1)$  beschrieben.

[...]

Zu einem bestimmten Zeitpunkt zwischen 14.00 Uhr und 14.14 Uhr ist die Entfernung des Flugzeugs von der Radarstation am geringsten. Die bis dahin seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit soll in Minuten bestimmt werden. Dafür werden zwei verschiedene Lösungsansätze I und II betrachtet:

$$\text{I} \quad d(s) = \sqrt{\begin{pmatrix} 18-8s \\ -4s \\ -1-s \end{pmatrix}} = \sqrt{81s^2 - 286s + 325} \quad \text{II} \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 18-8s \\ -4s \\ -1-s \end{pmatrix} = 0$$

$$d'(s) = 0$$

e Erläutern Sie jeden der beiden Lösungsansätze.

# Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben:



## Hinweise zur Schreibweise

Verschiedene mathematische Notationen werden in Abituraufgaben verwendet, beispielsweise

Skalarproduktzeichen:  $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$        $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Schreibweise von Funktionen:  $f(x) = x^2$        $f: x \mapsto x^2$

Griechische und lateinische Buchstaben als Parameter :

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$$



## Allgemeine Hinweise zu Abituraufgaben:

### Weitere Aufgabenbeispiele

Weitere Aufgabenbeispiele können auf der Homepage des IQB heruntergeladen werden:

<https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/>

- Die Erwartungshorizonte in den IQB-Poolaufgaben beschränken sich auf wesentliche Kernideen, die zur Lösung einer Aufgabe notwendig sind, sind damit **keine Modelllösungen**.
- Nicht alle Aufgaben sind zum derzeitigen Kernlehrplan konform.  
→ Dies wird bei der Aufgabenauswahl für NRW berücksichtigt.



## Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024:

### Auswahlbedingungen im ersten Prüfungsteil

- **NEU:** Einführung einer **begrenzten Schülersauswahl im ersten Prüfungsteil**
- Für den **ersten Prüfungsteil** erhält die Schule für Grund- und Leistungskurse jeweils einen Satz hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgaben zum Download.
- Diese Aufgabensätze bestehen aus einem **Pflicht- und** einem **Wahlpflichtteil**.
- Eine Aufgabenauswahl durch die Lehrkräfte ist im ersten Prüfungsteil nicht vorgesehen.



## Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024:

### Auswahlbedingungen im ersten Prüfungsteil Grundkurs

- Für den **Grundkurs** enthält der Aufgabensatz im **Pflichtteil drei Aufgaben**, die verbindlich zu bearbeiten sind: eine Aufgabe zu jedem Sachgebiet (Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik).
- Der **Wahlpflichtteil** enthält **sechs Aufgaben**: zwei Aufgaben zu jedem Sachgebiet (Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik).
  - Aus diesen sechs Aufgaben des Wahlpflichtteils **wählen die Schülerinnen und Schüler zwei Aufgaben** zur Bearbeitung aus.
  - Dabei ist eine Festlegung auf eines der drei Sachgebiete (Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik) möglich.
- Insgesamt bearbeiten die Schülerinnen und Schüler im Grundkurs **fünf** Aufgaben im ersten Prüfungsteil.



## Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024:

### Auswahlbedingungen im ersten Prüfungsteil Leistungskurs

- Für den Leistungskurs enthält der Aufgabensatz im **Pflichtteil vier Aufgaben**, die verbindlich zu bearbeiten sind: zwei Aufgaben zum Sachgebiet Analysis und je eine Aufgabe zu den Sachgebieten Vektorielle Geometrie und Stochastik.
- Der **Wahlpflichtteil enthält sechs Aufgaben**: zwei Aufgaben zu jedem Sachgebiet (Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik).
  - Aus diesen sechs Aufgaben des Wahlpflichtteils **wählen die Schülerinnen und Schüler zwei Aufgaben** zur Bearbeitung aus.
  - Dabei ist eine Festlegung auf eines der drei Sachgebiete (Analysis, Vektorielle Geometrie und Stochastik) möglich.
- Insgesamt bearbeiten die Schülerinnen und Schüler im Leistungskurs **sechs** Aufgaben im ersten Prüfungsteil.

# Notwendige Anpassungen: aktuelle Zeitstruktur bis Abitur 2023



## Grundkurs

Prüfungsteil	Aufgabentyp	Dauer
Teil 1	1 Aufgabensatz aus 5 Aufgaben ohne Hilfsmittel	max. 60 Minuten
Teil 2	3 Aufgaben mit Hilfsmitteln	min. 165 Minuten
Gesamt		max. 225 Minuten

## Leistungskurs

Prüfungsteil	Aufgabentyp	Dauer
Teil 1	1 Aufgabensatz aus 6 Aufgaben ohne Hilfsmittel	max. 70 Minuten
Teil 2	3 Aufgaben mit Hilfsmitteln	min. 200 Minuten
Gesamt		max. 270 Minuten

# Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024: neue Zeitstruktur

Bezirksregierung



## Grundkurs

Prüfungsteil	Aufgabentyp	Dauer
Teil 1	Insgesamt 5 Aufgaben ohne Hilfsmittel <b>inkl. Auswahlzeit</b>	<b>max. 90 Minuten</b>
Teil 2	3 Aufgaben mit Hilfsmitteln	min. 165 Minuten
<b>Gesamt</b>		<b>max. 255 Minuten</b>

## Leistungskurs

Prüfungsteil	Aufgabentyp	Dauer
Teil 1	Insgesamt 6 Aufgaben ohne Hilfsmittel <b>inkl. Auswahlzeit</b>	<b>max. 100 Minuten</b>
Teil 2	3 Aufgaben mit Hilfsmitteln	min. 200 Minuten
<b>Gesamt</b>		<b>max. 300 Minuten</b>



## Keine Änderung bei den Bewertungseinheiten

Bewertungseinheiten seit dem Abitur 2021 bereits angepasst

Kursart	Teil 1	Teil 2	Gesamt
<b>Grundkurs</b>	25 Punkte	Analysis 35 Punkte Vekt. Geometrie 20 Punkte Stochastik 20 Punkte	<b>100 Punkte</b>
<b>Leistungskurs</b>	30 Punkte	Analysis 40 Punkte Vekt. Geometrie 25 Punkte Stochastik 25 Punkte	<b>120 Punkte</b>



## Notwendige Anpassungen:

### Übergang vom 1. zum 2. Prüfungsteil bis Abitur 2023

Aktuelle Regelung in NRW bis 2023:

- Zu Beginn der Klausur wird der 1. Prüfungsteil bearbeitet.
- Wenn der Prüfling den 1. Prüfungsteil abgegeben hat, werden ihm die Aufgaben des 2. Prüfungsteils sowie die dafür zugelassenen Hilfsmittel (GTR oder CAS; Formelsammlung) ausgehändigt.



## Notwendige Anpassungen ab Abitur 2024:

### Übergang vom 1. zum 2. Prüfungsteil ab Abitur 2024

Ländergemeinsame neue Regelung ab Abitur 2024:

- Zu Prüfungsbeginn stehen den Prüflingen sowohl die Aufgaben zum 1. Prüfungsteil als auch die zum 2. Prüfungsteil zur Bearbeitung zur Verfügung.
- Jeder Prüfling entscheidet selbst über den Zeitpunkt, zu dem er die Bearbeitung zum 1. Prüfungsteil abgibt und die Hilfsmittel erhält.
- Dieser Zeitpunkt muss im LK innerhalb der ersten 100 Minuten und im GK innerhalb der ersten 90 Minuten nach Prüfungsbeginn liegen.



Für Ihre Aufmerksamkeit vielen Dank!