



Name: _____

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2024 und 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

Die folgenden vier Pflichtaufgaben müssen alle bearbeitet werden.

Pflichtaufgabe 1

Eine Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = 3x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Funktion f hat die Ableitung $f'(x) = (3 - 3x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

- Bestimmen Sie $f''(x)$.
- Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen.

(3 + 2 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2021 WbK LK A, Teilaufgabe a)



Name: _____

Pflichtaufgabe 2

Gegeben ist die in \mathbb{R} definierte Funktion $f: x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$. Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

- a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

- b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. *Abbildung 1*).

Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, überein.

Bestimmen Sie den Wert von a .

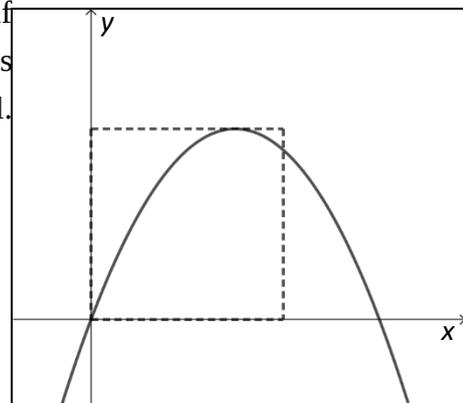


Abbildung 1

(2 + 3 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2023 LK HT A1, Teilaufgabe d)



Name: _____

Pflichtaufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ q \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $p, q \in \mathbb{R}$.

- a) Es gibt Werte für p und q , sodass die Vektoren \vec{u} und \vec{v} ein Rechteck aufspannen.

Geben Sie ein Beispiel dafür an.

- b) Es gibt Werte für p und q , für die das von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannte Rechteck ein Quadrat ist.

Ermitteln Sie alle möglichen Werte für p und q .

(1 + 4 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2023 LK NT A1, Teilaufgabe e)



Name: _____

Pflichtaufgabe 4

Die beiden folgenden Abbildungen zeigen je eine Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße mit dem Erwartungswert $\mu = 300$.

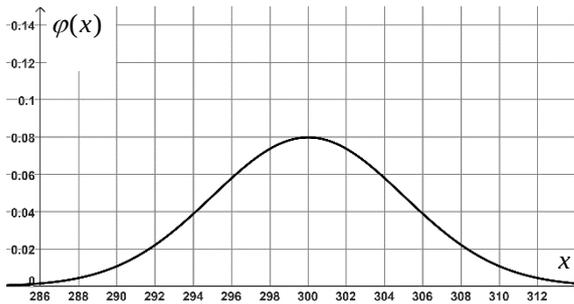


Abbildung 2

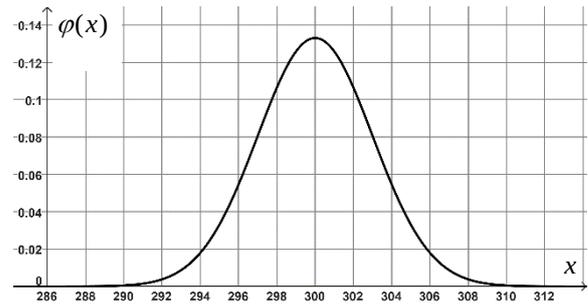


Abbildung 3

- a) Erläutern Sie, welche der beiden dargestellten Dichtefunktionen die größere Standardabweichung besitzt.
- b) Abbildung 2 gehört zur Zufallsgröße X .

Bestimmen Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $292 < X < 296$.

- c) Die Zufallsgröße Y ist normalverteilt. Die zugehörige Dichtefunktion ist φ und die Verteilungsfunktion Φ .

Entscheiden Sie, welcher der folgenden vier Ansätze **nicht** zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $Y \geq 290$ geeignet ist.

$$(I) \quad \int_{290}^{\infty} \varphi(x) dx \qquad (II) \quad 1 - \Phi(289)$$

$$(III) \quad 1 - \int_{-\infty}^{290} \varphi(x) dx \qquad (IV) \quad 1 - \Phi(290)$$

(1 + 2 + 2 Punkte)

Quelle: NRW Abitur 2017 WbK LK A1, Teilaufgabe d)

Hinweis:

Zeichengeräte sowie ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung sind zugelassen.

Unterlagen für die Lehrkraft

Beispielaufgabe Abiturprüfung 2024 und 2025

Mathematik, Leistungskurs

Prüfungsteil A: Aufgaben ohne Hilfsmittel

1. Aufgabenart

Hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgabe

2. Aufgabenstellung¹

siehe Prüfungsaufgabe

3. Materialgrundlage

- entfällt

4. Bezüge zu den Kernlehrplänen und den Vorgaben 2024 und 2025

Die Aufgaben weisen vielfältige Bezüge zu Kompetenzbereichen und Inhaltsfeldern des Kernlehrplans bzw. zu den in den Vorgaben ausgewiesenen Fokussierungen auf.

Im Folgenden wird auf Bezüge von zentraler Bedeutung hingewiesen:

1. Inhaltsfelder und inhaltliche Schwerpunkte

Funktionen und Analysis

- Funktionen als mathematische Modelle
- Fortführung der Differentialrechnung
- Grundverständnis des Integralbegriffs
- Integralrechnung

Analytische Geometrie und Lineare Algebra

- Lineare Gleichungssysteme
- Darstellung und Untersuchung geometrischer Objekte
- Lagebeziehungen und Abstände
- Skalarprodukt

Stochastik

- Kenngrößen von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- Binomialverteilung und Normalverteilung
- Testen von Hypothesen

2. Medien/Materialien

- entfällt

¹ Die Aufgabenstellung deckt inhaltlich alle drei Anforderungsbereiche ab.

5. Hinweis

- Ein Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung ist zugelassen.

6. Modelllösungen

Die jeweilige Modelllösung stellt eine mögliche Lösung bzw. Lösungsskizze dar. Der gewählte Lösungsansatz und -weg der Prüflinge muss nicht identisch mit dem der Modelllösung sein. Sachlich richtige Alternativen werden mit entsprechender Punktzahl bewertet (Bewertungsbogen: Zeile „Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung“).

Pflichtaufgabe 1

$$\text{a) } f''(x) = -6x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + (3 - 3x^2) \cdot (-x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = (-6x - 3x + 3x^3) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = (3x^3 - 9x) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

$$\text{b) } f'(x) = (3 - 3x^2) \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0 \text{ liefert die beiden Lösungen } x = -1 \text{ und } x = 1.$$

Es gilt $f''(-1) = (-3 + 9) \cdot e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ und $f''(1) = (3 - 9) \cdot e^{-\frac{1}{2}} \neq 0$. Somit besitzt die Funktion f lokale Extremstellen bei $x = -1$ und $x = 1$.

Pflichtaufgabe 2

$$\text{a) } \int_0^{2a} f(x) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2 \right]_0^{2a} = -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3.$$

b) Aufgrund der Symmetrie einer Parabel liegt die Maximalstelle von f genau in der Mitte zwischen den Nullstellen, $H(a | a^2)$ ist der Hochpunkt des Graphen von f .

$$\text{Für } a > 1 \text{ gilt: } \frac{4}{3}a^3 = (a^2)^2 \Leftrightarrow \frac{4}{3}a^3 = a^4 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}.$$

Pflichtaufgabe 3

a) Beispielsweise für $p = 1$ und $q = -2$ spannen die Vektoren \vec{u} und \vec{v} ein Rechteck auf.

b) Die Vektoren \vec{u} und \vec{v} spannen ein Rechteck auf:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot p + q = 0 \Leftrightarrow q = -2 \cdot p.$$

Das Rechteck ist ein Quadrat:

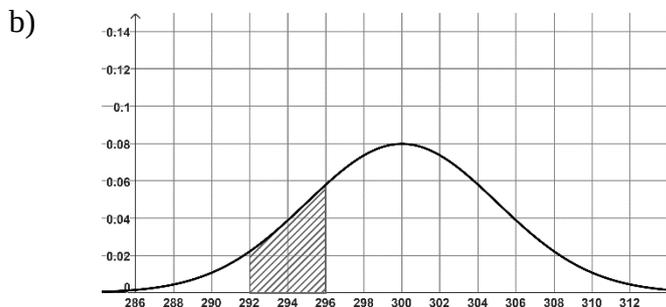
$$|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{p^2 + (-2 \cdot p)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} \Leftrightarrow \sqrt{5 \cdot p^2} = \sqrt{9} \Leftrightarrow 5 \cdot p^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow p = -\sqrt{\frac{9}{5}} \vee p = \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

Damit gilt: Für $p = -\sqrt{\frac{9}{5}}$ und $q = 2 \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}$ bzw. für $p = \sqrt{\frac{9}{5}}$ und $q = -2 \cdot \sqrt{\frac{9}{5}}$ spannen die Vektoren \vec{u} und \vec{v} ein Quadrat auf.

Pflichtaufgabe 4

a) Die in *Abbildung 2* dargestellte Dichtefunktion besitzt die größere Standardabweichung, da bei größerer Standardabweichung und gleichem Erwartungswert die Kurve „flacher“ verläuft.



Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses beträgt etwa

$$\frac{0,06 + 0,02}{2} \cdot 4 = 0,16 = 16\%$$

c) Ansatz (II) ist nicht geeignet.

7. Teilleistungen – Kriterien / Bewertungsbogen zur Prüfungsarbeit

Name des Prüflings: _____ Kursbezeichnung: _____

Schule: _____

Pflichtaufgabe 1

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK ²	ZK	DK
1	a) bestimmt $f''(x)$.	3			
2	b) untersucht die Funktion f auf lokale Extremstellen.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5)					
Summe Pflichtaufgabe 1		5			

Pflichtaufgabe 2

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	a) zeigt, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.	2			
2	b) bestimmt den Wert von a , für den der Flächeninhalt des Quadrats mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, übereinstimmt.	3			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5)					
Summe Pflichtaufgabe 2		5			

² EK = Erstkorrektur; ZK = Zweitkorrektur; DK = Drittkorrektur

Pflichtaufgabe 3

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	a) gibt ein Beispiel für Werte für p und q an, sodass die Vektoren \vec{u} und \vec{v} ein Rechteck aufspannen.	1			
2	b) ermittelt alle möglichen Werte für p und q , für die das von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannte Rechteck ein Quadrat ist.	4			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5)					
Summe Pflichtaufgabe 3		5			

Pflichtaufgabe 4

Anforderungen		Lösungsqualität			
Der Prüfling		maximal erreichbare Punktzahl	EK	ZK	DK
1	a) erläutert, welche der beiden dargestellten Dichtefunktionen die größere Standardabweichung besitzt.	1			
2	b) bestimmt näherungsweise die Wahrscheinlichkeit des angegebenen Ereignisses.	2			
3	c) entscheidet, welcher der vier Ansätze nicht zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses geeignet ist.	2			
Sachlich richtige Lösungsalternative zur Modelllösung: (5)					
Summe Pflichtaufgabe 4		5			

Summe insgesamt		20			
------------------------	--	-----------	--	--	--

Die Festlegung der Gesamtnote der Prüfungsleistung erfolgt auf dem Bewertungsbogen einer Aufgabe aus dem Prüfungsteil B.